

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA A DISTÂNCIA

Alexsandra Martins de Lima

Torre de Hanói e Função: a matemática pelo viés do jogo

Duas Estradas - PB

2013

Alexsandra Martins de Lima

Torre de Hanói e Função: a matemática pelo viés do jogo

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática a Distância da Universidade Federal da Paraíba como requisito para obtenção do título de licenciado em Matemática.

Orientadora: Prof^a. Ms. Cristiane Carvalho Bezerra de Lima

Duas Estradas - PB

2013

Catálogo na publicação

Universidade Federal da Paraíba

Biblioteca Setorial do CCEN

L732t Lima, Alessandra Martins de.

Torre de Hanói e função: a matemática pelo viés do jogo / Alessandra Martins de Lima. – Duas estradas, 2013.

58p. : il. –

Monografia (Licenciatura em Matemática) / EAD - Universidade Federal da Paraíba.

Orientadora: Prof^a. Ms. Cristiane Carvalho Bezerra de Lima.

Torre de Hanoi e Função: a matemática pelo viés do jogo

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática a Distância da Universidade Federal da Paraíba como requisito para obtenção do título de licenciado em Matemática.

Orientadora: Profa. Ms Cristiane Carvalho Bezerra de Lima

Aprovado em: ____/____/____

COMISSÃO EXAMINADORA

Prof^a. Ms. Cristiane Carvalho B de Lima (Orientadora)

Prof^a Dra. Rogéria Gaudencio do Rêgo (Examinadora)

Prof^o Ms. Luciélío Marinho da Costa (Examinador)

Aos meus pais, pelo incentivo, carinho e apoio irrestrito, propiciando vitória nesta minha caminhada.

AGRADECIMENTOS

À **Deus**, pela benção de minha existência de todas as minhas vitórias;

A **minha família**, pelo amor, dedicação e incentivo, sempre presentes em todos os instantes, com palavras de apoio que favoreceram minha ascensão cultural, profissional e pessoal;

A **minha orientadora**, pelo incentivo, compreensão e colaboração na presente trajetória;

Aos **colegas de profissão**, pelas trocas de experiências, pelo convívio, pelas alegrias e incertezas, paciência, perseverança e ajuda;

Aos meus **discentes** que traduzem o significado de minha profissão, juntos por uma educação de qualidade.

“Numa folha qualquer eu desenho um sol
amarelo e com cinco ou seis retas é fácil
fazer um castelo (...) Giro um simples
compasso e num círculo eu faço o
mundo...”

Aquarela - Toquinho

RESUMO

Nossa pesquisa teve como objetivo o estudo das Funções Matemáticas relacionando-as ao jogo Torre de Hanoi, de forma a investigar: como o referido jogo enquanto atividade lúdica pode contribuir para se trabalhar as Funções Matemáticas, e como tais Funções são pensadas em sala de aula comparada com a proposta dos Parâmetros Curriculares Nacionais e se assim oportuniza o discente a estabelecer uma vinculação com sua vivência cotidiana. A pesquisa foi aplicada na Escola Estadual John Kennedy, localizada no município de Guarabira-Pb, com os discentes da série do 9º ano do ensino fundamental, qual traçamos três objetivos específicos: Aplicar e relacionar o Jogo da Torre de Hanói aos conteúdos da série de 9º ano; Averiguar se com o bom emprego do Jogo Torre de Hanói discente desenvolveram habilidades e competências para resoluções de problemas matemáticos; E verificar a postura dos estudantes em relação a utilização do Jogo referido e a relação estabelecida com a disciplina de matemática. A presente pesquisa esteve apoiada por autores como: Lara (2003) e Pais (1999) a cerca das atividades lúdicas; Caraça (1989) e Pontes (1990) que nos esclarece sobre o conceito de função e Dante (2011) que nos apoia nos assuntos relacionados à matemática e resolução de problemas. Nossos resultados foram satisfatórios, uma vez que foi possível relacionar função matemática ao jogo Torre de Hanói, demonstrando que a dinâmica docente e um bom plano de aula poderão auxiliar no contexto para boas aulas com o emprego do lúdico para responder de modo inovado as questões matemáticas, que por hora ainda são consideradas ariscas, difíceis e complicadas, contribuindo para desfazer tais mitos e para melhorar o fazer pedagógico quanto ao componente curricular de matemática.

Palavras-chave: Matemática. Torre de Hanói. Funções.

ABSTRACT

Our research had like subject the study of mathematical functions connected with the game Tower of Hanoi in order to investigate: How the game Tower of Hanoi like a playful activity can to contribute to work mathematical functions and, since the mathematical functions are contemplated in schoolroom once proposed in the National Curriculum Parameters giving the opportunity for the student establish a link with the conviviality. This way, we describe three specific subjects: Apply the game Tower of Hanoi in the 9^o grade of basic education; Check with the good use if the game Tower of Hanoi the students developed abilities and skills to solve mathematical problems; and verify the student's attitude with the use of the game Tower of Hanoi and the relationship established with the subject Mathematics. This research was supported by the authors like: Lara (2003) and Pais (1999) about the playful activity; Caraça (1989) and Pontes (1990) who clarified us about the concept of functions and; Dante (2011) who support us in the subjects associated with the resolution of mathematical problems. The results was satisfactory since it was possible to create a relationship with between the mathematics and the game Tower of Hanoi demonstrating as student dynamic and a good lesson plan would aid in the contest of good classes with the playful to response, this way, innovating the mathematical questions those consider frisky, hard and complicated, contributing to dissolve these myths and to turn better the teaching action on the mathematics like a subject. This research was applied for 9^o grade of basic education in the John Kennedy State School, located in the Guarabira-PB city.

Keywords: Mathematics, Tower of Hanoi, Functions.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Ilustração 1 – Classificação dos Jogos	22
Ilustração 2 – Torre de Hanoi	27
Ilustração 3 – Demonstração da ação do Jogo Torre de Hanoi 1	28
Ilustração 4 – Demonstração da ação do Jogo Torre de Hanoi 2	29
Ilustração 5 – Tabela com sequência de movimentos de peças para o Jogo Torre de Hanoi	29
Ilustração 6 – Ilustração 6. Fotografia da aula da turma de 9º ano do Ensino Fundamental Maior da Escola Estadual John Kennedy, Guarabira-PB, em leitura dinâmica de texto de apoio, que esclareceu os objetivos e regras sobre o Jogo Torre de Hanoi.	35
Ilustração 7 – Fotografia da turma de 9º ano do Ensino Fundamental Maior da Escola Estadual John Kennedy, Guarabira-PB, na aplicação prática do Jogo Torre de Hanoi.	36
Ilustração 8 – Fotografia da turma de 9º ano do Ensino Fundamental Maior da Escola Estadual John Kennedy, Guarabira-PB, em aula expositiva dialogada sobre Função.	37
Ilustração 9 – Fotografia da turma de 9º ano do Ensino Fundamental Maior da Escola Estadual John Kennedy, Guarabira-PB, de posse do jogo da Torre de Hanói e do questionário Pró-teste.	39
Ilustração 10 – Tabela demonstrativa, com a sequência para o exercício proposto no questionário Pró-teste.	40
Ilustração 11 – Fotografia da turma de 9º ano do Ensino Fundamental Maior da Escola Estadual John Kennedy, Guarabira-PB, discutindo as questões e sendo preparados para o questionário Pós-teste.	45

LISTA DE GRÁFICOS

- Gráfico 1** – Conhecimento discente com relação ao jogo Torre de Hanoi e satisfação de aplicabilidade. 47
- Gráfico 2** – Apresentação se com o uso do jogo existiu facilidade em responder as questões matemáticas e se estudantes utilizariam o jogo para a resolução de outros problemas. 47
- Gráfico 3** – De que maneira o(a) discente gostou de utilizar o jogo. 48

SUMÁRIO

MEMORIAL.....	13
INTRODUÇÃO.....	16
A MATEMÁTICA PELO VIÉS DAS ATIVIDADES LÚDICAS	18
1. A História da Torre de Hanoi	27
1.1. Objetivos e regras para o Jogo Torre de Hanoi	28
MATERIAL E MÉTODO	31
2. O campo da pesquisa	32
2.1. Os sujeitos da pesquisa	32
2.2. O desenvolvimento da pesquisa	32
ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS	34
3. A experiência com o Jogo Torre de Hanoi	35
3.1. Função e o Jogo de Hanoi – Questionário Pré-teste	37
3.2. Função e o Jogo de Hanoi – Questionário Pós-teste	46
4. Considerações Finais.....	49
5. Referências.....	51
Apêndices	54

MEMORIAL

1.1 Histórico da formação escolar

Minha trajetória na educação escolar foi muito proveitosa visto que tenho ótimas lembranças de minha vida de estudante. Estudei durante toda educação básica em escolas públicas, onde graças a Deus encontrei pessoas que contribuíram muito para minha formação, foram aprendizados que guardo até hoje em minha vida. Só tenho a agradecer a todos que me ajudaram a percorrer todo esse caminho. Estudei a primeira etapa do ensino fundamental em uma escola municipal situada no distrito de Cachoeira dos Guedes município de Guarabira, lá comecei minha trajetória de estudante, a segunda etapa do ensino fundamental passei pelo Cento Educacional Osmar de Aquino, onde passei 4 anos de minha vida de estudante. Após essa etapa passei a estudar numa escola Estadual de mesma cidade onde passei todo o ensino médio foi que me preparei para entrar na Universidade.

Concluí o ensino médio em uma escola estadual da cidade de Guarabira-PB no ano de 2000 que na época almejava entrar na universidade. Nesse mesmo ano prestei vestibular para Universidade Estadual da Paraíba.

1.2 Histórico da formação universitária

Ao concluir o ensino médio fiz o vestibular da Universidade Estadual da Paraíba, não para o curso que queria, pois na cidade em que morava e que moro não tinha esse curso, então optei para Licenciatura em Geografia e com muito esforço e dedicação nos estudos consegui ser aprovada no vestibular.

Em 2001 comecei a cursar e foram quatro anos de uma vida acadêmica muito boa, pois pude perceber como é a vida dentro de uma universidade. As vivências, os amigos que fiz, os conhecimentos que adquirir foram de fundamental

importância para minha vida profissional. A participação nos cursos e mini cursos que tinha na Universidade na minha área de atuação foi um prazer participar de todos, pois sabia que minha participação seria fundamental para formação do meu currículo.

Ao concluir em 2005 meu curso de Licenciatura em geografia tive a oportunidade de participar de uma seleção para uma Pós Graduação na Universidade Federal da Paraíba campus III em Bananeiras. E graças a Deus consegui passa por mais essa etapa.

Em 2006 comecei a estudar o curso **de Especialização em Educação Profissional Técnica de Nível Médio Integrada ao Ensino Médio na Modalidade Educação de Jovens e Adultos**, então, ia à cidade de Bananeiras todo sábado. Com muita dificuldade, pois morava na zona rural de Guarabira. Mais valeu muito apenas, pois, foi ai que eu me apaixonei pela educação, foi nessa pós-graduação que eu aprendi sobre o ensino, foi esse curso que me abriu as portas para a licenciatura, em que tive a oportunidade de conviver durante dois anos com pessoas que me ensinaram muito sobre o processo de ensino e aprendizagem. Foi a partir daí que tive a oportunidade de começar a ensinar e daí começar a adquirir experiência.

Conclui essa Pós-graduação em 2007 tive a felicidade de ter meu trabalho de conclusão publicado pela UFPB intitulado de “a influência da iluminação elétrica no processo ensino e aprendizagem na EJA na escola Raul de Freitas Mouzinho no município de Guarabira-PB”.Uma Coletânea Didática no Proeja, volume 1. Ao concluir mais essa etapa de minha vida de estudante tive a oportunidade de começar a lecionar e comecei a ensinar matemática e química como tinha simpatia pela área de cálculo.

1.3 Experiência como professor de Matemática.

Comecei a ensinar em 2007 numa escola Municipal da cidade de Guarabira-PB como professora de matemática e como não tinha formação em matemática veio a oportunidade de prestar mais uma vez vestibular dessa vez pela UFPB, Licenciatura em Matemática pela EAD e mais uma vitória alcançada,

consegui aprovação e comecei a estudar no polo de Duas Estradas- PB. Esse curso foi o que mais lutei briguei para concluir, pois sei que as oportunidades vão se abrindo a cada dia com ele. A cada dia me apaixonava mais pela matemática, nesse curso foi onde realmente me firmei pelo o que quero para minha vida profissional hoje posso dizer com muita confiança que o que quero é ensinar matemática.

Desde 2007 leciono matemática e esse curso me dá a cada dia instrumentos metodologias para melhorar minhas aulas e fazer com que meus alunos possam mudar a visão que tem da disciplina.

INTRODUÇÃO

A busca por diferentes metodologias que favoreçam a construção e/ou a reconstrução de conhecimentos, bem como uma aprendizagem significativa do Componente Curricular de Matemática tornaram-se cada vez mais necessária, considerando que a Matemática é sinônima de prática cotidiana e a escola o espaço de vivência para o exercício de uma práxis competente, orientada para uma prática reflexiva.

Ensinar Matemática deve partir do conhecimento do dia-a-dia, discernindo que o referido componente curricular está envolto em toda classe social, faz parte de nossa cultura, está nas tecnologias, em todos os ambientes, em nossas ações, no modo de pensar e de agir da sociedade. Quando se parte do cotidiano conhecido, o (a) estudante se sente motivado a aprender o conteúdo científico, o que facilita o aprendizado de âmbito formal.

Em nossa memória culturalmente já está subentendido que a Matemática é uma matéria difícil, e que cálculos são de soluções complicadas. Entretanto, as atividades lúdicas chegam para facilitar e estabelecer um elo prático para o processo do ensino-aprendizado do referido componente curricular. Pode fazer acontecer, pois está para a promoção de incorporação de conteúdos de modo mais criativo, contribuindo para romper o pensamento estabelecido.

Precisamos de aulas de Matemática mais contextualizadas e condizentes com as perspectivas discentes, motivadoras e envolventes. Foi o que justamente nos conduziu à prática do experimento com o jogo conhecido como Torre de Hanói, aplicado para série de 9º ano do ensino fundamental da Escola Estadual John Kennedy, localizada no município de Guarabira-PB.

E por esta via é que problematizamos: Como o Jogo Torre de Hanói enquanto atividade lúdica pôde contribuir para se trabalhar as Funções matemáticas? Pergunta-se ainda de que modo as Funções matemáticas são pensadas em sala de aula e como atendem ao que é proposto nos Parâmetros Curriculares Nacionais? O jogo oportuniza o discente estabelecer uma vinculação com sua vivência cotidiana?

Nosso objetivo foi analisar a aplicação do Jogo Torre de Hanói e suas relações com o ensino. Nossas ações e objetivos específicos compreenderam:

1 – *Aplicar o Jogo da Torre de Hanói para série de 9º ano do Ensino Fundamental;*

2 – *Verificar se com o bom emprego do Jogo Torre de Hanói os estudantes desenvolveram habilidades e competências para resoluções de problemas matemáticos;*

3 – *Analisar como os (as) estudantes se sentiram em relação à utilização do Jogo Torre de Hanói e a relação estabelecida com a disciplina de matemática.*

Sobre o Jogo da Torre de Hanói verificamos ser bastante interessante e provoca curiosidade, sendo formado por uma base com três hastes e discos de tamanhos diferentes, sabendo que em uma das hastes encontram-se colocados todos os discos dispostos do maior para o menor. E que o objetivo do jogo é trocar todos os discos de haste com o menor número possível de movimentos, de modo que só se pode mover um disco de cada vez, observando ainda como regra, que não se pode deixar um disco de diâmetro maior sobre outro de diâmetro menor. Pode ser confeccionado com materiais diversos, inclusive com sucatas, incentivando o(a) próprio(a) discente a fabricá-lo.

O respectivo trabalho foi disposto em três capítulos:

No Capítulo I tratamos da Matemática pelo viés das atividades lúdicas, incluindo a abordagem da historicidade do Jogo da Torre de Hanói, os aspectos metodológicos e aplicação prática da atividade lúdica em exercício, trazendo no referencial teórico os autores Lara (2003), Pais (1999), Caraça (1989), Pontes (1990), Dante (2011) entre outros.

O Capítulo II elucidou a descrição de nossa proposta, contemplando respectivas aplicações práticas da atividade lúdica em questão Torre de Hanói e as relações estabelecidas com as Funções, mediante aplicação de dois questionários, denominados de Pré-teste e Pós-teste;

No Capítulo III discutimos e analisamos os dados levantados nos questionário Pré- teste e Pós-teste, sendo o primeiro aplicado antes do Jogo Torre de Hanói e o segundo após o entendimento e manipulação do jogo.

E por fim, realizamos concernentes considerações, na expectativa de contribuição para com a melhoria efetiva no ensino-aprendizado do componente

curricular de matemática, no anseio de cooperar para a desmistificação de que a matemática é uma disciplina complicada e esquiva.

2. A MATEMÁTICA PELO VIÉS DAS ATIVIDADES LÚDICAS

O Componente Curricular de Matemática, em geral, é descrito como uma disciplina temida pela maioria dos discentes, pois incorporamos ao longo dos anos que o entendimento de cálculos é uma ação complicada e difícil.

Deparamo-nos com o ensino-aprendizado clássico para a área da Matemática, com aulas expositivas engessadas, que pouco instigam a participação discente, habitualmente o professor ou a professora seleciona os conteúdos que elencam e consideram como importantes, normalmente, aqueles que são também requisitos para cada série, mas que infelizmente, algumas vezes, podem não se encontrar contextualizados ao cotidiano e a realidade discente, e que para eles por vezes são desconexos.

Sabemos que a Matemática é uma ciência complexa, que de certa forma requer uma atenção especial tanto para aplicação, como para compreensão. É uma disciplina que está no dia-a-dia, mas existem entraves para traduzir os conteúdos programáticos escolares em realidades. Todavia o referido componente pode ser estudado em situações mais comuns, cabendo ao docente estabelecer a ponte para que estudantes ultrapassem as dificuldades e enxerguem as relações matemáticas com o cotidiano. Foi o que nos direcionou as palavras de Oliveira (2007) p. 5, que defende que:

Ensinar Matemática é desenvolver o raciocínio lógico, estimular o pensamento independente, a criatividade e a capacidade de resolver problemas. “Nós, como educadores matemáticos, devemos procurar alternativas para aumentar a motivação para a aprendizagem, desenvolver a autoconfiança, a organização, a concentração, estimulando a socialização e aumentando as interações do indivíduo com outras pessoas. (OLIVEIRA, 2007, P.5).

D’ Ambrósio (1991, p.1) afirma que “[...] há algo errado com a matemática que estamos ensinando. O conteúdo que tentamos passar adiante através dos sistemas escolares é obsoleto, desinteressante e inútil”. O discurso do referido autor evidencia que é relevante estabelecer uma reflexão acerca de novas estratégias pedagógicas que contribuam para facilitar e subsidiar o processo de ensino e da

aprendizagem do referido componente curricular, ao passo de que discentes também sejam estimulados ao pensamento independente, a autonomia e construção de saberes.

Para enveredarmos em busca do ensino-aprendizado com mais credibilidade e qualidade, observamos a proposta da utilização de jogos para auxiliar na resolução dos problemas matemáticos. Tais recursos didáticos possibilitam um estudo mais motivador e um aprender com base no esclarecimento da relação com o prático, com reflexões acerca do elaborado e das resoluções encontradas. Conforme Paulo Freire (1996) a alegria não chega apenas no encontro do achado, mas faz parte do processo da busca. E ensinar e aprender não pode dar-se fora da procura, fora da boniteza e da alegria.

Mencionamos ainda no referido contexto, o que Libâneo (2007), discorre sobre como o(a) educador(a) deve atender a diversidade cultural, respeitando as diferenças na sala de aula e no contexto escolar, uma vez que discentes podem aprender e raciocinar de maneira diferente. Assim, nos questionamos como podemos aprender Matemática na atualidade, mediante os avanços científicos e tecnológicos eminentes de nossa sociedade? Faz-se necessária uma reflexão de nossa práxis, no tocante às práticas docentes e a concepção do ensino e da aprendizagem de Matemática existente nas escolas.

O aprender e o ensinar Matemática são processos indissolúveis e devem ser construídos a partir dos saberes docentes e discentes, em processos de trocas mútuas e compartilhadas. Entretanto, enfatiza-se outra vez que a típica aula de Matemática ainda continua atrelada meramente a reprodução dos conteúdos e à tradicional aula expositiva. Pretende-se que o aluno aprenda Matemática através de um modelo apresentando e solucionado pelo(a) professor(a), o que nos remete as observações de D'Ambrósio (1989), quando menciona que a resolução dos problemas reduz-se a procedimentos determinados pelo docente.

Discernimos que os recursos didáticos envolvem uma diversidade de elementos utilizados como suporte experimental na organização do processo de ensino e de aprendizagem. Nesse sentido, citamos Pais (1999), que, quanto à finalidade do recurso didático, afirmando que é servir de interface mediadora para facilitar a relação entre docente, discente e o conhecimento em um momento preciso

da elaboração do saber. Então, podemos entender que são criações pedagógicas desenvolvidas para facilitar o processo de aquisição do conhecimento.

Compreendemos sim, que as técnicas de ensino e os recursos didáticos transformados e adequados à aplicação de cada conteúdo em específico podem contribuir e muito para o aproveitamento e desenvolvimento dos conteúdos programáticos curriculares como um todo, e ainda poderão trazer um diferente dinamismo na atenção em especial para com os conteúdos da Matemática. Cabe ao docente selecionar, inovar e atribuir vida a este ou aquele recurso, com a habilidade de discernimento de qual recurso é mais viável utilizar para desenvolver um determinado conteúdo. Nessa situação observamos as palavras de Fiorentini e Miorim (1996), que defendem que:

O professor não pode subjugar sua metodologia de ensino a algum tipo de material porque ele é atraente ou lúdico. Nenhum material é válido por si só. Os materiais e seu emprego sempre devem estar em segundo plano. A simples introdução de jogos ou atividades no ensino da matemática não garante uma melhor aprendizagem desta disciplina. (FIORENTINI E MIORIM, 1996, p.9).

De certo modo, a metodologia usada pelo (a) docente não garante a ação efetiva do ensino-aprendizagem, pois está atrelada ao desafio da ação adequada do recurso didático, da finalidade em si e de aulas bem programadas, condizentes com a realidade discente, o que solicita e exige competências e habilidades docentes.

Sabemos que o ensino- aprendizagem de conteúdos matemáticos pelo viés de atividades lúdicas encontra-se respaldo na visão “*Arquimediana*”, pois sugere que o(a) educador(a) deve atuar durante o processo de ensino e de aprendizagem no exercício da função de facilitador(a), isto é, operando como mediador(a) entre o(a) discente e a construção do conhecimento matemático, instigando as ideias matemáticas para que o estudante consiga estabelecer relações com a realidade que ele(a) vivencia, que segundo a AME (2003);

O professor deve realizar atividades com os alunos que os vislumbre, em seguida, partir para a matematização levantando questionamentos, finalizando com o registro do que o aluno aprendeu, uma forma de teoria. Este é o caminho arquimediano segundo a proposta AME – Atividades Matemáticas que Educam. (FASCÍCULO 1, 2003, p. 126).

Para o(a) educador(a) deflagrar e difundir as ideias discentes, é preciso apresentar situações-problemas relevantes, com tomadas de ações que dirijam

discentes a pensar e a refletir. Jamais apresentando as respostas prontas, mas sempre no diálogo, levá-los (as) ao entendimento do desconhecido, despertando a curiosidade, para que se percebam as respostas construídas com autonomia.

É relevante acrescentar, que de fato, caso não se admitisse as predisposições conaturais para o conhecimento matemático, que seria todo ele passível de construção a partir apenas de mecanismos gerais para o desenvolvimento da inteligência, comuns a todos os indivíduos, como pretendeu Piaget, isto deveria ter, como consequência, apenas um modesto desempenho em matemática da grande maioria dos indivíduos. Nesse sentido, observamos as arguições de Machado (1992):

O jogo tem dois aspectos que contribuem para a caracterização de sua dimensão alegórica, que dizem respeito à aceitação de desafios em conteúdos escolares, sobretudo nas avaliações, e ao desenvolvimento em sentido amplo da capacidade de projetar. (MACHADO, 1992, p. 40-41).

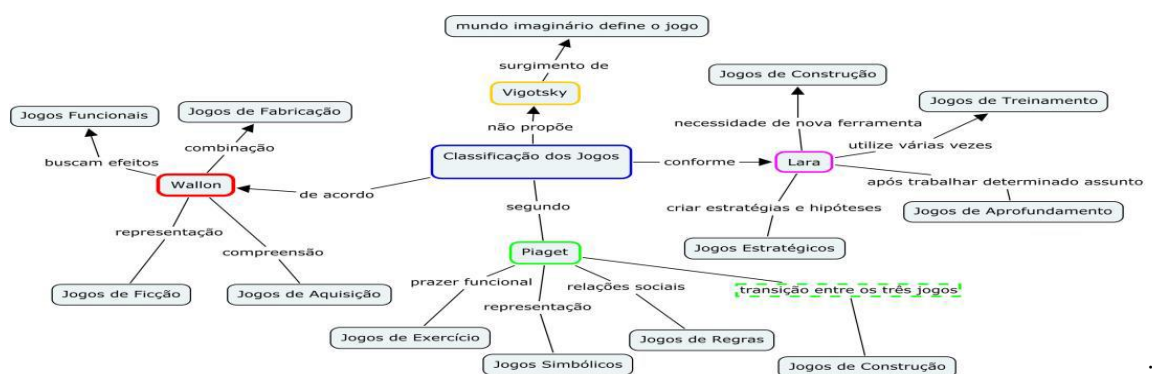
O jogo é definido no Mini - Dicionário Aurélio (2011, p. 447) como “atividade lúdica com um fim em si mesmo, sendo física ou mental, fundada em regras”. Origina-se do latim “iocus” que significa diversão, brincadeira. Negrine (1994) na sua obra “Aprendizagem e Desenvolvimento Infantil” afirma que a partir do século XIX e XX o estudo científico do jogo ganha novas dimensões, emergindo diferentes teorias sobre o assunto. O psicólogo Claparède (1911) assegura que o incremento psicológico não se realiza sozinho, logo o desenvolvimento do indivíduo é o resultado das determinações da natureza e do meio ambiente. Nesse contexto, o indivíduo (criança) recorre instintivamente a dois instrumentos: o jogo e a imitação.

Lara (2003) cita que as atividades lúdicas, como os jogos matemáticos, em sala de aula poderão trazer os mais variados benefícios, dentre os quais podemos destacar: O docente consegue detectar os discentes que estão com dificuldades reais; discentes corroboram para com seus colegas e educadores indicando se o assunto foi bem assimilado ou não; em jogos se estabelece uma competição entre os jogadores e os adversários, o que motiva participação; durante o jogo, observa-se que discentes se posiciona mais crítico, confiante e atento, uma vez que expressa o que ajuíza, propondo indagações e conclusões. Também não existe o receio de errar, pois o desacerto é considerado necessário para se atingir a

uma resposta correta; Além dos(as) estudantes se empolgarem com a atmosfera de uma aula diferente, o que os(as) conduzem para com que aprendam com suavidade, sem que se perceba.

Observa-se que as benfeitorias apontadas aqui por Lara (2003) nos direcionam a cogitação da importância de um bom plano de aula, com objetivos e ações bem definidas, que subsidiem as novas formas de trabalhar os assuntos matemáticos utilizando os jogos, com percepções em detectar o aprendizado referente ao conteúdo tratado no jogo, discernindo que a partir dessas ações podem a vir a surgir novos e diferentes conceitos matemáticos.

E a partir de então diversos estudiosos começaram a observar e analisar os jogos sob vários aspectos, incluindo propostas para classificação dos mesmos, esclarecendo assim os posicionamentos de Wallon, Vygotsky, Piaget e Lara em mapa conceitual, como podemos demonstrar na ilustração 1.



Fonte: Adaptação de Negrine (1994) e Lara (2003)

Ilustração 1. Classificação dos Jogos de acordo com Wallon, Piaget, Vygotsky e Lara.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática do Ministério de Educação e Cultura (MEC), em relação à utilização de jogos no ensino de Matemática, ressaltam que estes:

Constituem uma forma interessante de propor problemas, pois permitem que estes sejam apresentados de modo atrativo e favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resolução de problemas e busca de soluções. Propiciam a simulação de situações que exigem soluções vivas e imediatas, o que estimula o planejamento das ações [...] (BRASIL, PCNEF, 1998, 46).

O processo de valorização dos jogos teve início no Brasil na década de 80 com o aumento da produção científica sobre o assunto (JESUS; FINI, 2001, p. 130), o que motivou a crença de que o jogo resolveria o problema do ensino, tornando-o mais atrativo. Autores como Kammi e Declark (1994, p. 171) defendem que os jogos devam ser utilizados por todo o ensino fundamental, pois apresentam vantagens em relação aos exercícios repetitivos tradicionais. Os Parâmetros Curriculares Nacionais justificam que o uso de jogos favorece a criatividade na elaboração de estratégias de resolução (BRASIL, 1997, p. 47).

Destacamos que o direito à Educação é o mesmo para todos e que ainda assim, para o ensino público e privado nos confrontamos com uma diferença a ser considerada, como a exemplo em 2012, as escolas particulares obtiveram uma média proficiência de 211 pontos, enquanto que as públicas em média de 158. A região Nordeste continua ainda a deter um índice inferior de desempenho (Dados: Saeb – 2012, acesso site em 23/11/2013).

Tendo em vista as dificuldades sociais de uma região, mais investimentos financeiros e técnicos deveriam ser atribuídos na tentativa de diminuição das diferenças de desempenho. Estudantes para cada segmento já deveriam se encontrar com as habilidades esperadas para a Matemática; e caso, o direito à educação de qualidade não prevaleça, dificilmente as condições de universalizar o ensino-aprendizado nas séries da Educação Básica também predominarão. É o que nos leva a refletir sobre qual educação desejamos e quais as ações devemos incorporar para chegar a resultados satisfatórios, pois investimentos existem, mas como estão sendo aproveitados e empregados são os elementos-chave da questão.

Para tanto, em nossa proposta aqui versada, é importante também compreender que o conceito de Função é considerado um dos mais importantes da Matemática, sabendo que Ponte (1990) descreve a origem e o desenvolvimento deste conceito ao longo da História da Matemática, observando a evolução na Educação Matemática, acrescentando que se constitui em um instrumento matemático indispensável para o estudo quantitativo dos fenômenos naturais, com demonstrações de que o referido desenvolvimento histórico foi um processo delicado e extenso.

Esclarecemos que as funções são fundamentais em todas as áreas da matemática, e que o enfoque atual no ensino de seu conceito foi idealizado, através do desenvolvimento da *Teoria de Conjuntos*, proposta por Cantor e Frege, no final do século XIX. “Porém, segundo registros de papiros egípcios, as funções estão intimamente ligadas às origens da Matemática e têm aparecido direta ou indiretamente nos grandes passos do desenvolvimento da Ciência.” (GÓMEZ; VILELA, 2007, p. 78).

No cotidiano é possível relacionar as múltiplas relações envolvendo as funções matemáticas, tornando o conteúdo mais aproximado da vida real, como a exemplo associar a Matemática ao conteúdo da Biologia, considerando:

Você é um ser único! De fato, a natureza, para distingui-lo dentre todos os outros seres humanos, associou-lhe um código genético, descrito pela cadeia de DNA (ácido desoxirribonucléico) do seu organismo. Assim, a natureza faz uma associação que a cada um dos seres humanos faz corresponder um único código genético. Observe que existem códigos genéticos que ainda não estão associados a ser humano algum. Contudo, as últimas descobertas da Engenharia Genética indicam que, num futuro não muito distante, poderemos ter dois seres humanos compartilhando o mesmo código genético. (GÓMEZ, VILELA, 2007, p. 80).

No referido exemplo, percebemos que existe uma Função, quando assim consideramos que o conjunto dos seres vivos forma o domínio da função, sendo o contradomínio formado pelos possíveis códigos (DNA). Relacionado está na Função proposta a correspondência de cada ser vivo ao seu código de DNA.

Outra situação mencionada pelos mesmos autores, Gómez e Vilela (2007), é uma ação de dia-a-dia, quando a exemplo:

Se você viajar de ônibus da cidade de Campos para o Rio de Janeiro, comprará um bilhete na rodoviária para embarcar num determinado ônibus. Eis a primeira associação: a você, como viajante, foi designado um ônibus, dentre todos aqueles que compõem a frota da companhia escolhida para realizar a viagem. O bilhete que você comprará possui um determinado código, indicando exatamente qual o lugar que você deverá ocupar dentro do ônibus. Eis outra associação: a você, como passageiro, foi designada uma dentre as várias poltronas do ônibus. Qualquer outro passageiro terá de ocupar outra poltrona, que também lhe será designada no momento de comprar o bilhete. (GÓMEZ; VILELA, 2007, p. 79).

No contexto da Função, existem duas situações, uma com o domínio formado pelos passageiros que viajam de Campos para o Rio, e o contradomínio

formado pelos ônibus da companhia que fazem o trajeto, compreendendo a função que associa cada passageiro a determinado ônibus; E por seguinte, a outra função, que possui como domínio o conjunto de passageiros que irão embarcar e, como contradomínio, o conjunto de poltronas do ônibus, sendo a imagem, por sua vez, são as poltronas ocupadas por passageiros. Esse exemplo configura uma situação rotineira na qual aparecem os conceitos de função pouco explorada por educadores nas salas de aula. Outra relação possível é explorar o fato de existirem poltronas nas quais possa se sentar mais de um passageiro. Os passageiros serão associados de dois a dois, recebendo as passagens com os respectivos números.

Para o esclarecimento do estudo com aplicação de Funções faz-se necessário situar o respectivo conteúdo no currículo da educação brasileira, tanto para o Ensino Fundamental quanto para o Ensino Médio. Nos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (Brasil, 1998) enfoca-se para as séries 6º e 7º ano (terceiro ciclo) do Ensino Fundamental, a exploração da noção de função por intermédio de atividades algébricas, que engloba a generalização a partir de padrões aritméticos, tabelas e gráficos, como também o estudo da variação de grandezas, o que viabiliza o discernimento entre incógnita e variável. No referido documento ainda temos a análise da interdependência entre grandezas, bem como sua representação algébrica, no tocante aos conteúdos conexos ao bloco, denominados Grandezas e Medidas.

Considerando as os anos finais do ensino fundamental, o incremento do pensamento algébrico tem como ponto de apoio a pré-álgebra compreendida no ciclo anterior (séries do 6º e 7º anos). Sendo assim, a aprendizagem que envolve o raciocínio proporcional deve subsidiar estudantes a representar em um sistema de coordenadas cartesianas a variação de grandezas. “Analisando e caracterizando o comportamento dessa variação em diretamente proporcional, inversamente proporcional ou não-proporcional” (Brasil, 1998, p.82). É o que podemos exemplificar quanto às variações do perímetro e da área de um retângulo em relação à variação da medida do lado.

Tratando dos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio - PCNEM, o ensino- aprendizagem deve ser estendido e aprimorado quanto à capacidades/habilidades de “abstração, raciocínio em todas as suas vertentes,

resolução de problemas de qualquer tipo, investigação, análise e compreensão de fatos matemáticos e de interpretação da própria realidade” (Brasil, 2000, p.41).

Particularmente, a temática sobre as Funções não podem ser concebidas isoladamente, pois disponibiliza um caráter integrador, considerando dois aspectos: as relações internas da própria matemática e o exame de procedimentos de fenômenos articulados a outras áreas do conhecimento.

Quanto ao primeiro aspecto, observa-se a representação gráfica das Funções Trigonômicas, como também o estudo das propriedades de retas e parábolas estudadas em Geometria Analítica. Além de comuns às propriedades gráficas das funções afins e quadráticas. Sendo ainda, exemplos também de integração interna da matemática a representação algébrica, tais como as progressões aritméticas e geométricas, assim como o aproveitamento do estudo de polinômios e equações algébricas no estudo de funções polinomiais.

Podemos ainda enfatizar, que no cenário de conteúdos distribuídos para as diferentes séries, com relação às Funções, é possível observar, geralmente, o conteúdo aplicado ao 9º ano, no início do segundo bimestre, as ideias fundamentais de noções básicas, variação e construção de tabelas e gráficos para Funções Afim e Quadrática. Depois, retoma-se o estudo das Funções ao longo do 2º e 3º bimestres do 1º ano do Ensino Médio, enfocando proporcionalidade (direta, inversa, direta com o quadrado), Função Afim e Quadrática, Função Exponencial (análise de crescimento, equações e inequações) e Logarítmica (equações e inequações). E por fim, o estudo de Funções é concluído no 3º bimestre do 3º ano do ensino médio, com destaque para a qualidade das funções, gráficos (funções trigonométricas, exponencial, logarítmica e polinomial, análise de sinal, crescimento e taxa de variação), composição (translações e reflexões) e função inversa.

Orientações Curriculares para o Ensino Médio (Brasil, 2006, p.72) nos auxilia na nossa compreensão quando sugere que o estudo de Funções pode ser iniciado com uma exploração qualitativa das relações entre duas grandezas em diferentes situações, como já exemplificamos no caso cotidiano dos passageiros e o ônibus e da Biologia entre os indivíduos e o DNA.

1. A HISTÓRIA DA TORRE DE HANOI

O Jogo Torre de Hanói é também conhecida pelos nomes Quebra-Cabeças do Fim do Mundo e Torre de Bramanismo, sendo divulgado pelo matemático francês Edouard Lucas no ano de 1883 (TAHAN, 1974, p.137), vendido como brinquedo. Sabe-se que o jogo era popular na China e no Japão e que veio do Vietnã.

A inspiração do matemático se alicerçou em uma lenda Hindu, que tratava de um templo em Benares, cidade de Santa da Índia, local que se encontrava uma torre sagrada do bramanismo, que tinha como função melhorar a disciplina mental de jovens monges. Conforme lenda, no grande templo de Benares, logo abaixo da cúpula que marca o centro do mundo, existia uma placa de bronze, que sobre a qual estariam fixadas três hastes de diamante. Em uma das hastes, o deus Brama, no momento da criação do mundo, colocou 64 discos de ouro puro, de modo que o disco maior permanecesse sobre a placa de bronze e os outros decrescendo até chegar ao topo.

A presente descrição encontrada em Ferrero (1991) e Machado (1992), acrescenta ainda que então os monges receberam a deliberação de transferir a torre formada pelos discos, de uma haste para outra, usando a terceira como auxiliar, com as restrições de movimentar um disco por vez e de jamais colocar um disco maior sobre um menor. Os respectivos monges deveriam manter a ação com eficiência noite e dia e, quando terminassem o trabalho, o templo seria transformado em pó e assim o mundo sucumbiria e se acabava.

Na figura 1, temos a apresentação de maneira geral, do Jogo Torre de Hanoi, com a descrição tradicional contada na lenda.

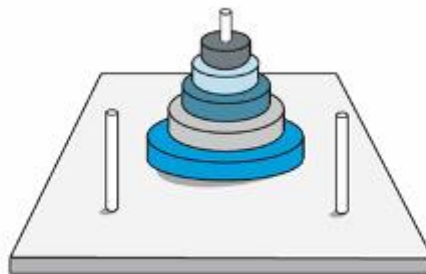


Ilustração 2 - Torre de Hanói Fonte: Gonçalves (2007, p. 16)

Em Tahan (1974), temos uma citação sobre a descrição do jogo, que versa:

Em quando Deus criou o mundo, colocou no templo de Benares, o jogo de Hanói com 64 andares de ouro. Por determinação de Brama, os sacerdotes ficaram encarregados de transportar a Torre de ouro da haste A para a haste B, de acordo com as regras do jogo. Os movimentos, desde o princípio do mundo, são feitos pelos sacerdotes, noite e dia, sem parar. Segundo a crença dos hindus, a terminação desse jogo vai assinalar o fim do mundo [...] (TAHAN; 1974, p. 140).

É evidente que, o uso do jogo pelo jogo, não dá conta da aprendizagem dos conceitos matemáticos. É o docente quem deve transformar o jogo, de certo ponto de vista, considerado como uma brincadeira, em uma atividade pedagógica, indo além da concepção modista do trabalho com jogos, transformando-os em atividades investigativas, com finalidade didática.

1.1 Objetivos e Regras para o Jogo Torre de Hanoi

Retoma-se o Jogo Torre de Hanoi, que de maneira geral, podemos resumir como objetivos e regras, transferir a pilha de discos de um pino para outro, conseguindo completar a transferência com o número mínimo possível de movimentos, movendo um disco de cada vez, nunca permitindo que um disco maior fique sobre um menor.

E como jogar na prática? Não é fácil imaginar os movimento feitos com uma pilha de 64 discos, assim, vamos começar por uma pilha com 1 disco, apresentado na ilustração 3:

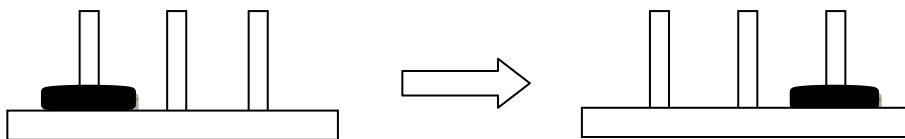
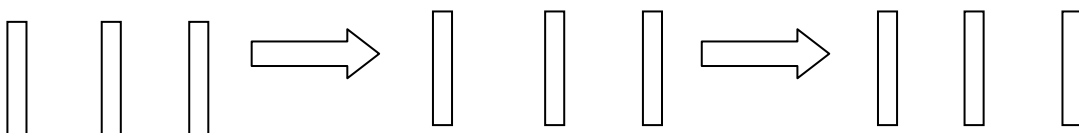


Ilustração 3. Demonstração da ação do Jogo Torre de Hanoi 1. Fonte: Alessandra Martins de Lima (2013)

Para um disco, a transferência se dá com um movimento: $m_1 = 1$, considerando que m_n é a quantidade de movimentos de n discos. E assim, para dois discos, temos conforme ilustração 4:



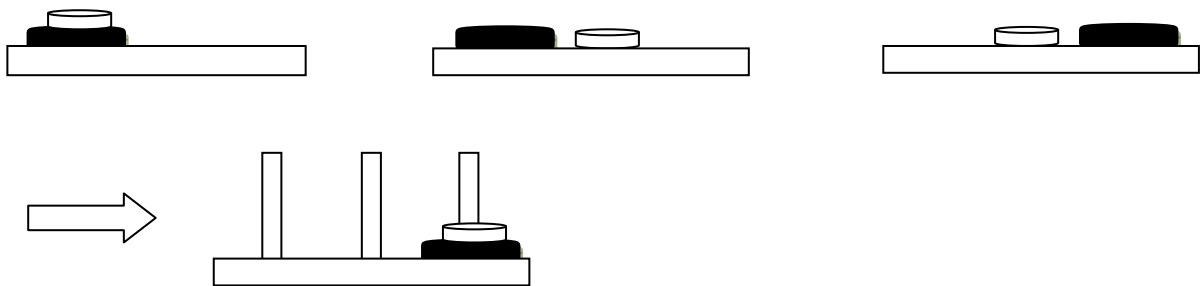


Ilustração 4. Demonstração da ação do Jogo Torre de Hanoi 2. Fonte: Alexsandra Martins de Lima (2013)

Então, para dois discos, a transferência ocorre com 3 movimentos, ou seja, $m_2 = 3$. Aumentando-se o número de discos, como a exemplo, para três discos, a transferência ocorre com a ação de sete movimentos, isto é que $m_3 = 7$, e assim por diante, de modo que podemos acrescentar a tabela para melhor elucidar a questão, considerando “n” o número de discos e m_n o número de movimentos, como indicado na ilustração 5.

N	1	2	3	4	5	6
m_n	2	3	7	15	31

Ilustração 5: Tabela com a seqüência de movimentos e peças para Jogo Torre de Hanoi.

Ao observar a segunda linha Ilustração 5, temos que seus números são como os descritos a seguir:

$$\begin{aligned}
 1 &= 2 - 1 \\
 3 &= 2^2 - 1 \\
 7 &= 2^3 - 1 \\
 15 &= 2^4 - 1
 \end{aligned}$$

O que nos conduz a realizar o seguinte pensamento: $m_n = 2^n - 1$. Observando que a presente sentença é verdadeira para $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, mas nos perguntamos, será mesmo verdadeira para sempre?

Assim, demonstra-se por indução. Considerando “S” o conjunto dos números naturais “n” tais que “n” discos são movidos com $2^n - 1$ movimentos, observa-se:

(a) $1 \in S$, pois para 1 disco necessitamos de $1 = 2^1 - 1$ movimento.

(b) Vamos supor que $k \in S$, isto é, k discos são removidos com $2^k - 1$ movimentos.

Por diante vamos provar que $k + 1 \in S$, isto é, que $m_{k+1} = 2^{k+1} - 1$. E para remover $k + 1$ discos passamos inicialmente k discos para o bastão de trás com m_k movimentos. E em seguida, com 1 movimento, o $(k + 1)$ – ésimo disco vai para o outro bastão da frente; Considerando que com mais m_k movimentos, os k discos de trás passam para o bastão da frente, como desejamos demonstrar:

$$m_{k+1} = m_k + 1 + m_k$$

$$m_{k+1} = 2^k - 1 + 1 + 2^k - 1$$

$$m_{k+1} = 2 \cdot 2^k - 1$$

$$m_{k+1} = 2^{k+1} - 1$$

O que comprova que $k + 1 \in S$. Sabendo que o princípio da indução nos garante que “ n ” discos podem sempre ser removidos com $2^n - 1$ movimentos e, em particular, $m_{64} = 2^{64} - 1$.

O presente jogo Torre de Hanoi pode ser trabalhado nos diferentes seguimentos e séries, até mesmo na pré-escola, quando pode ser associada a questões de coordenação motora, identificação de formas, ordem crescente e decrescente, dentre outras questões. Podendo numa segunda perspectiva, relacionar a estratégia de transferência das peças, com a contagem dos movimentos e com o raciocínio indutivo, que de início deve ser apresentado com um número menor de peças, isto é, na ação de resolução de problemas mais simples, que por seguinte, poderá apontar o caminho que dará propriedade a se conhecer uma das mais importantes formas de raciocínio matemático.

Para o ensino médio, em especial, poderá ainda ser trabalhado o conceito de seqüência numérica, no tocante a progressão geométrica, como observar também o crescimento de funções exponenciais, além das potências de 2 e o processo de construção da linguagem matemática, com aplicação do conceito de variáveis, por exemplo.

Podemos retomar aos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998), e reafirmar que as atividades lúdicas na matemática têm importância no desenvolvimento do raciocínio lógico, onde o(a) estudante começa a refletir na

matemática de maneira mais ágil, comparando-a com seu dia-a-dia, que poderá conduzi-los(as) a obter melhor compreensão e desempenho na referida disciplina.

E ainda citar Borin (1995, p. 8), que discorre “que a atividade de jogar, se bem orientada, tem papel importante no desenvolvimento de habilidades de raciocínio como organização, atenção e concentração, tão necessárias para o aprendizado, em especial da Matemática, e para resolução de problemas em geral.” Oliva (2006), também defende que é necessário brincar e, assim, oferecer uma motivação para o estudo da Matemática.

Nessa ação, professores (as) e estudantes podem apreciar o jogo como uma ferramenta de motivação para aulas de matemática, com a intenção de tornar as aulas a cada dia mais interessantes, centrada na ação do fazer pedagógico significativo.

2. A EXPERIÊNCIA DO JOGO NA SALA DE AULA

Sabemos como é relevante garantir o ensino-aprendizado do componente curricular da Matemática, de modo que se estabeleçam discussões sobre um fazer pedagógico mais eficiente para a referida disciplina e nas escolas.

Trabalhos assim contribuem para a melhoria da ação docente em serviço, o que contribui com a formação continuada e a motivação discente, que aprende a Matemática de maneira desmistificada.

Na nossa pesquisa pensamos em dois elementos: **Função Matemática** associada à **Atividade Lúdica**, escolhendo o Jogo da Torre de Hanoi para ser apreciado na relação. Desenvolvemos assim um Plano de Aula, dois Questionários, denominados de Pré-teste e Pós-teste, o primeiro contendo 10 questões Matemáticas sobre Função e o segundo, contendo 5 questões de indagações sobre a utilização do jogo e a Matemática. Levamos o Jogo para três aulas consecutivas em comum acordo com os nove discentes, que na composição perfaziam o número total de estudantes do 9º ano escolhidos para a pesquisa.

Os discentes não assinaram seus nomes nos questionários, assim não serão diretamente identificados, mas os(as) mesmas autorizaram a publicação das

fotografias que compuseram a nossa pesquisa, com a autorização dos respectivos responsáveis.

2. O CAMPO DA PESQUISA

A Escola Estadual John Kennedy está localizada no município de Guarabira-PB, funciona com o segmento do Ensino Médio e Ensino de Modalidade EJA. É um ambiente escolar acolhedor e tranquilo, com poucos estudantes por série.

O ambiente foi escolhido para realização do desenvolvimento do respectivo trabalho, por considerar o número de estudantes viável para aplicação da pesquisa, uma vez que um menor número discente é passivo de uma maior atenção, orientação direta e dedicação. Por outro lado, mesmo com poucos estudantes, teríamos o desafio de tornar a aula envolvente, fazendo que os(as) mesmos(as) participassem, como também consistiria da avaliação de como se comportariam mediante o desafio proposto.

2.1 Sujeitos da Pesquisa

Trabalhamos com alunos do 9º ano (anos finais de ensino fundamental), vespertino da Escola Estadual John Kennedy. E tão logo apresentamos a novidade para o estabelecimento da nossa parceria, observamos que ali estavam discentes interessados em aprender a matemática de maneira inovada.

Esclarecemos a nossa proposta de atividade no diálogo dias antes de iniciarmos o trabalho, tornando a ação prazerosa e consentida pelos nove estudantes que se disponibilizaram a participar da pesquisa, lembrando que o número total discente na respectiva sala de aula eram 11.

2.2 Desenvolvimento da Pesquisa

A pesquisa proposta foi laborada de forma gradativa, tomando por base o referencial teórico pesquisado, na perspectiva de deter e conhecer os principais conceitos e pressupostos que fundamentam o processo de ensino-aprendizagem da

matemática, com os embasamentos fundamentais para se aplicar Função Matemática associada ao Jogo Lúdico Torre de Hanoi.

Novas atitudes docentes são necessárias para que se ocorram mudanças relevantes no processo educacional, como destacadas e exemplificadas em Libâneo (2007), que afirma o ensino assumido enquanto mediação, e que desse modo, o(a) aluno(a) tem aprendizagem ativa e o professor(a) confere a ajuda pedagógica necessária, é o que justamente poderá ocorrer na aplicabilidade dos jogos lúdicos.

No contexto, o jogo aproxima-se da matemática via desenvolvimento de habilidades de resolução de problemas (Moura, 1991), e ainda, permite trabalhar os conteúdos culturais inerentes ao próprio jogo. E aqui temos o Jogo Torre de Hanoi como um recurso didático para se aplicar os conteúdos de Função Matemática.

Então, elaboramos um texto com a explicação da historicidade, objetivos e regras práticas do jogo (Apêndice I), na intenção de fornecer subsídios palpáveis para os(as) estudantes. Desenvolvemos e aplicamos também os dois Questionários já evidenciados, como Pré-teste (Apêndice II) e Pós-teste (Apêndice III). Para Tobias (1987) o método de pesquisa por intermédio de questionário deixa maior liberdade e melhor possibilidade de resposta pela pessoa e/ou estudante participante, de acordo consigo mesma. Além de ser um método que propicia uma coleta de respostas mais objetivas e puras.

O Plano de Aula (Apêndice IV) elaborado estabeleceu a base para viabilização de nossos objetivos, como um facilitador para a execução das atividades propostas. Sabemos que o planejamento pedagógico é necessário, que consiste em uma ferramenta básica para elaboração e execução da atividade docente. Hoje, vivemos a segunda grande onda do planejamento, conforme Gandin (2008), que discorre:

A primeira entra em crise na década de 70. A década de 80, embora, na prática, se apresente como uma grande resistência ao planejamento, contém os mais efetivos anos em termos da compreensão da necessidade, do estudo, do esclarecimento e da confirmação desta ferramenta." (GANDIN, 2008, p.05)

A citação aqui versada demonstra a dimensão da necessidade de se compreender a importância do ato de planejar, não apenas no nosso dia-a-dia, mas principalmente, no dia-a-dia da sala de aula. Para Moretto (2007), planejar é organizar ações. Essa é uma definição simples, mas que revela e justifica a

importância da atitude de planejar, uma vez que o planejamento deve existir para facilitar o trabalho tanto do educador(a) com o do(a) educando(a). Portanto planejar consiste em organizar as ideias e informações. Nesse sentido, o plano de aula é o produto de um processo de ponderação e decisão, o que torna possível e concreta a ação docente, permitindo uma reflexão de nossas práticas, que conforme Freire (2007) é refletindo a prática de ontem e hoje, que se melhora a próxima prática.

3. ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Uma das finalidades do ato da docência é fazer da escola um ambiente de motivação viva. É desafiá-la a mudar sua pedagogia de repasse de conhecimento, sendo capaz de inovar-se, na ação promover a capacidade de saber pensar, em aprender para intervir e assim transformar suas relações.

Apresentamos nossa proposta para o ensino-aprendizado do conteúdo de Funções pelo viés do jogo lúdico Torre de Hanoi, exploramos o histórico do referido jogo e respectivas regras, bem como em uma aula expositiva relacionamos o jogo e as funções. Tomamos por visão de aula expositiva os relatos de Freire e Shor (1996), quando versam que na aula expositiva dialógica o professor(a) também entra com o saber, mas ao mesmo tempo participa de um processo de reaprender, em síntese, se estimula o compartilhamento de conhecimentos e a reelaboração dos mesmos a partir dos conteúdos aprendidos.

Escolhemos o jogo Torre de Hanoi para o estudo das Funções porque é versátil e pode ser empregado para os diferentes seguimentos e séries, além do mesmo atender adequadamente os objetivos dos conteúdos do estudo para com as Funções Matemáticas. Para Saviani (1991) se é verdade que a escolha dos meios depende dos objetivos, também é verdade que a consecução dos objetivos depende da escolha e, mais do que isso, do uso dos meios, ou seja, do recurso didático adequado e aplicado coerentemente. Então, cabe a professores e professoras atribuir vivacidade ao material didático escolhido para se transmitir um determinado conteúdo, tornando possível a ação o ensino-aprendizado mais facilitado, pois o material didático aproximará o estudante da realidade concreta.

3 A EXPERIÊNCIA COM O JOGO TORRE DE HANOI

Iniciamos em sala de aula a apresentação de nossa proposta pedagógica, mostrando o Jogo Torre de Hanoi, com explicações claras e objetivas sobre as regras para se jogar o respectivo jogo, quando assim realizamos uma leitura dinâmica do texto (Apêndice I) de apoio elaborado para ocasião. E assim, estabelecemos o diálogo para escutar possíveis dúvidas. Podemos observar a leitura do texto explicativo sobre o Jogo Torre de Hanoi na ilustração 6, o que evidenciou a participação discente.



Foto: Magna Célia da Costa Maciel

Ilustração 6. Fotografia da aula da turma de 9º ano do Ensino Fundamental II da Escola Estadual John Kennedy, Guarabira-PB, em leitura dinâmica do texto de apoio que esclareceu os objetivos e regras sobre o Jogo Torre de Hanoi.

Seguidamente, pedimos aos discentes que formassem duplas e os(as) deixamos a vontade para fazer suas observações e reflexões sobre o jogo proposto, como também jogar. Mas, concomitantemente nos permanecemos próximos para realizar as devidas orientações/mediações úteis, sempre que os(as) estudantes nos pediram auxílio e/ou indagavam. Naquele momento, os(as) estudantes manipulavam o material didático, jogo construído de madeira, pregos grandes e

emborrachado - EVA, como a exemplo disposto na ilustração 7, as orientações docentes.



Foto: Magna Célia da Costa Maciel

Ilustração 7. Fotografia da turma de 9º ano do Ensino Fundamental II da Escola Estadual John Kennedy, Guarabira-PB, na aplicação prática do Jogo Torre de Hanoi.

Pode-se comentar que os jogos estão em relação direta com o pensamento matemático, pois por vias gerais ambos possuem regras, definições, instruções, deduções, operações, desenvolvimento, utilização de códigos, regras e novos conhecimentos. Além de serem utilizados para introduzir, subsidiar e amadurecer os conteúdos, na preparação discente para o avanço e aprofundamento nos conteúdos já vivenciados.

Nesse sentido, os jogos lúdicos devem ser escolhidos e preparados com os devidos cuidados, o que justifica a elaboração de plano de aula eficiente, para levar o(a) estudante a adquirir os conceitos matemáticos relevantes. É coerente comentar que devemos utilizá-los não como meros instrumentos recreativos no processo de ensino-aprendizagem, mas sim apresentá-los como facilitadores, a colaborar para desfazer eventuais dificuldades que alunos e alunas apresentem com relação a determinados conteúdos matemáticos.

Acrescentamos aqui Tahan (1968), que esclarece, para que os jogos produzam os efeitos desejados é preciso que sejam, de certa forma, dirigidos pelos(as) educadores(as). No jogo Torre de Hanoi, a solução do problema deverá ser encontrada com o movimento mínimo de peças, é o que alunos e alunas devem descobrir. Conforme Machado (1996), quando se chega até as regras de modo construtivo, compreendendo-se todas as etapas do processo de construção, adquire-se uma consciência na realização da transferência, que a razão dos movimentos torna-se mais clara, enriquecendo-se o significado do jogo.

Na proposta para se esclarecer Função Matemática em aula expositiva dialogada tivemos toda a atenção discente, a mediada que foi demonstrada a teoria, se estabeleceu a relação com o jogo, como podemos observar na ilustração 8.



Foto: Magna Célia da Costa Maciel

Ilustração 8. Fotografia da turma de 9º ano do Ensino Fundamental II da Escola Estadual John Kennedy, Guarabira-PB, em aula expositiva dialogada sobre Função.

3.1. Função e o Jogo Torre de Hanói – Questionário Pré-teste

Entendemos que não existe um único caminho para se desvelar a dinâmica da sala de aula, e qualquer que seja o escolhido, o fundamental é que o docente se perceba como construtor/mediador de conhecimentos, como alguém que evidencia uma realidade antes encoberta.

Então, trilhar em direção ao ensino de qualidade para todos é relevante incorporar um novo contexto de papel e perfil docente e discente, com ricos, variados e diferentes métodos de ensino-aprendizagem. Por isso, visualizar a Função Matemática de modo diferente, na aplicação de um jogo, na realização da ação do jogar, foi realmente, significativo e determinante para a aquisição do conteúdo de Função, pois apenas após o jogo, o(a) estudante escutou/participou sobre o conteúdo de Função na teoria em aula expositiva dialogada.

Para a primeira aula foi realizada a leitura do texto explicativo do jogo e executada a ação de jogar. A segunda aula conferiu a exposição dos conteúdos teóricos sobre função, sendo aula versada como expositiva dialogada. Assim, reapresentamos o jogo e aplicamos o questionário Pré-teste, que juntava o aprendizado adquirido com a ação do jogo e as explicações da aula expositiva. No terceiro e último momento de aula, alunos e alunas finalizaram o questionário Pré-teste e por seguinte responderam o questionário Pós-teste.

A análise e discussão dos resultados dos questionários Pré-teste e Pós-teste estão para esclarecer nossa respectiva pesquisa. Dos onze alunos participantes apenas nove responderam o questionário Pré-teste e oito responderam o Pós-teste, enfatizando que dois discentes faltaram às aulas.

Quanto às dez questões do questionário Pré-teste, obtivemos os resultados gerais dispostos na tabela 1, analisados conforme resposta certa, errada e como não responderam.

Tabela 1: Número de discentes que responderam as questões de maneira correta, de modo errado ou que não responderam.

Número da Questão	Resposta Certa	Resposta Errada	Não Responderam
Questão 1	7	0	2
Questão 2	8	0	1
Questão 3	8	0	1
Questão 4	5	0	4
Questão 5	8	0	1
Questão 6	8	0	1
Questão 7	2	0	7
Questão 8	5	2	2
Questão 9	9	0	0
Questão 10	9	0	0

Fonte: Alessandra Martins de Lima

Pela presente constatação tivemos apenas duas respostas erradas, pois ao que notamos o(a) estudante preferiu não responder do que anotar a resposta errada. Uma pena, pois as tentativas pelo acerto e erro são sempre válidas, pois com os erros também aprendemos, cogitando que podemos corrigi-los. Em sete questões tivemos bons resultados em acertos, e as duas respostas erradas, pelo que notamos na análise do questionário Pré-teste respondido, estão mais para falta de atenção do que a dificuldade no conteúdo abordado e/ou jogo ou na matemática em si.

Aqui podemos observar com a ilustração 9, discentes nas investidas e tentativas em resolver o questionário Pré-teste, estando de posse do jogo da Torre de Hanói e do referido questionário.



Foto: Magna Célia da Costa Maciel

Ilustração 9. Fotografia da turma de 9º ano do Ensino Fundamental II da Escola Estadual John Kennedy, Guarabira-PB, de posse do jogo da Torre de Hanoi e do questionário Pré-teste.

Lembramos que o questionário Pré-teste (Apêndice II) encontrava-se constituído por dez questões, que então analisamos observando o ponto de vista discente. Podemos complementar ressaltando os PCN (BRASIL, 1997), que versam sobre valorizar e estimular a utilização do jogo, como um incentivo a mais na aquisição do conhecimento, pois favorece a criatividade de alunos e alunas na

elaboração de estratégias para resolverem problemas, aceitarem o desafio, mas que, no entanto, incumbem ao docente o papel de pesquisador. Assim, temos:

[...] um aspecto relevante nos jogos é o desafio genuíno que eles provocam no aluno, que gera interesse e prazer. Por isso, é importante que os jogos façam parte da cultura escolar, cabendo ao professor analisar e avaliar a potencialidade educativa dos diferentes jogos e o aspecto curricular que ele deseja desenvolver. (BRASIL, 1997, p.49)

Então, na primeira questão tínhamos uma função $Y = 3x$, onde x está relacionando ao número de canetas e Y ao preço a pagar. O discente poderia ter compreendido também a questão por meio de um gráfico. Relaciona-se que é o mesmo raciocínio para com a prática do Jogo da Torre de Hanoi, quando o valor de “ n ” seria a quantidade de canetas e o valor de “ m_n ” corresponderia o valor a pagar. Esclarecendo que para responder a segunda questão, o(a) discente deveria seguir o mesmo raciocínio da primeira questão.

n/x	1	2	3	4	5	6
m_n/Y	3	6	9	12	15

Ilustração 10. Tabela demonstrando a seqüência dos números da função do exercício proposto.

A terceira questão relaciona o valor de x a quantidade de litros e Y é o valor total a ser pago, quando os(as) alunos(as) conseguiram representar que: $Y = 2,50.54 \Rightarrow Y = 135$ reais.

Na referida terceira questão bastava o(a) discente apresentar apenas o valor de $Y = 135$, sendo que na quarta questão deveria apresentar a fórmula da terceira questão, ou seja, a função, que seria $Y = 2,50x$.

Caraça (1989, p. 129), propõe a definição de função através de uma série de reflexões lógicas a respeito da utilização de instrumentos matemáticos, a fim de investigar fenômenos naturais que de algum modo evidenciam uma relação de dependência. Visa um modo de quantificar as variações qualitativas destes fenômenos. O referido autor explica como surgiu a necessidade de criar um

instrumento matemático que estudasse a variação de quantidade, ou seja, a lei quantitativa, cuja essência fosse à correspondência entre dois conjuntos.

Voltando as duas questões, terceira e quarta, que teriam relação com o jogo exercitado, considerando que a Torre de Hanói também estabelece a compreensão para mesma função, lembrando que é igual ao raciocínio que os discentes já realizaram para as questões 1 e 2.

Na quinta questão, o(a) estudante poderia representar a função sob duas condições, assim temos a relação $Y = 5x + 40$ ou $Y = 40 + 5x$, em que x seria o valor da hora de trabalho e Y seria o valor total cobrado, perfazendo um total a ser pago em nove horas um valor de 85 reais.

Segundo Caraça (1989, p. 129), o conceito de função apareceu no campo matemático para servir de instrumento próprio para o estudo destas leis. O referido autor explica a definição de função enquanto uma correspondência de conjuntos e versa: “Sejam x e y duas variáveis representativas de conjuntos de números; diz-se que y é função de x e escreve-se $y = f(x)$, se entre as duas variáveis existe uma correspondência unívoca no sentido $x \rightarrow y$. Sendo x chama-se variável independente, a y variável dependente.”

Retomamos a questão 6, que segue a mesma ideia da questão 5. Então, para o entendimento e estabelecimento de relação entre Função e o jogo Torre de Hanoi, mais uma vez temos as duas variáveis que se encontram relacionadas.

O livro de Matemática, que é muito conhecido, com contextos e aplicações, do autor Luiz Roberto Dante (2011), inicia o estudo de funções com uma breve descrição da importância do referido estudo em outras áreas do conhecimento e de alguns aspectos do seu desenvolvimento histórico. Depois, explora intuitivamente a noção de função através de alguns problemas matemáticos e, então, apresenta a noção de função por meio de conjuntos: “Dados dois conjuntos não vazios A e B , uma função de A em B é uma regra que indica como associar cada elemento $x \in A$, a um único elemento $y \in B$.” (DANTE, 2011, p. 75).

Após definir uma função, o autor apresenta a notação $f: A \rightarrow B$, evidenciando que a função f transforma x de A em y de B , escrevendo então $y = f(x)$. Na sequência, apresenta os conceitos de domínio, contradomínio e imagem através de conjuntos.

No contexto, para Mendonça e Oliveira (1999) partem do pressuposto que o(a) docente como mediador do processo educativo, com suas crenças, concepções, valores e representações sobre os fatos matemáticos, se indagado sobre “o que é função?” Possivelmente terá uma multiplicidade de respostas tais como: fórmula, subconjunto do produto cartesiano, previsão, gráfico, variação, transformação, interdependência entre grandezas, raciocínio indutivo, visão só algébrica ($y = f(x)$).

Nesse sentido, mostrar ao estudante os diferentes raciocínios, num na perspectiva do todo é bastante coerente. E por esta via, temos uma pedagogia da matemática para o desenvolvimento do pensamento funcional, que deve levar em conta, segundo Mendonça e Oliveira (1999), três situações:

A primeira, diz respeito à dificuldade de compreensão do conceito de função, pelo(a) aluno(a), devido às suas múltiplas representações. Um conhecimento associado a um conceito é estável no indivíduo, se este pode articular as diferentes representações do conceito sem contradições. Mas, vamos lembrar que podemos associar função ao dia-a-dia.

A segunda situação refere-se à ideia do conhecimento como uma rede de significados, os quais constituem feixes de relações intrínsecos, articulando-se em teias. Dentro da concepção de Machado (1996) que reconhece a articulação de tais redes, constituídas individual e socialmente, em permanente estado de atualização, a construção do conhecimento matemático como rede dar-se-á não a partir de um centro determinante de desenvolvimento, mas a partir de focos de interesse.

Nesta intenção, apontamos diferentes focos de interesse tendo por base aqueles revelados a partir da indagação do que é função. Mostramos as diferentes vias para se representar uma função matemática.

A terceira e última situação refere-se ao ensino por meio da resolução de problemas, foi o que fizemos, motivar o(a) estudante a agir ativamente frente a situações novas, ou seja, frente a problemas apresentados pelo(a) professor(a) ou gerados da realidade social, no tocante de que as questões propostas estão contextualizados com o cotidiano discente.

Voltamos a explorar a função que o(a) estudante apresentou para a solução do problema da questão 6, que poderia ser representada de duas formas: $Y = 32 + 1,50x$ ou $Y = 1,50x + 32$, onde x é o número de peças produzidas e Y é o

custo da quantidade de peças produzidas, chegando ao resultado de que $x = 500$ peças.

Depois de “brincar” ou jogar com a torre e descobrir a técnica de transferência que resulta de uma boa movimentação, podemos analisar os dados em uma tabela ou construir um gráfico. Pode-se dizer que o número de jogadas $+1$ é um número do tipo $2x$. Levando o(a) estudante a compreensão que o número de jogadas é igual a: $2^n - 1$ e, assim sendo, podemos calcular o número de jogadas necessárias para uma quantidade qualquer de peça. Através do raciocínio criaremos a possibilidade do(a) discente entender a Lei de Função que relaciona o número de peças com o número de jogadas.

Então, o conceito de função pode ser bem esclarecido quando conseguimos relacionar objetos de um conjunto com os de outro, de maneira que possamos obter uma “lei” que os relacione. E ao que já comentamos podemos demonstrar a validade da referida lei através do princípio da indução, aqui já citado e também demonstrado.

Podemos ainda assinalar além do caráter pedagógico matemático do jogo outros caracteres didáticos, explorando a exemplo, as seguintes questões:

(a) Supondo que se leve em média 2 segundos para realizar cada jogada. Quanto tempo levaríamos para jogar, sem errar, com 15 peças?

(b) Com 64 discos, é possível se jogar?

(c) Tente encontrar o número mínimo de jogadas para 30 peças. É possível de se jogar? Qual seria um limite razoável de peças?

(d) Construa o gráfico que representa a relação entre o número de peças e o número mínimo de movimentos para se realizar o jogo.

(e) De acordo com a lenda do jogo, em quanto tempo levaria para acabar o mundo supondo que os monges levassem 3 segundos para movimentar cada peça?

Portanto, o jogo destacado é interessante, pois vai além dos aspectos matemáticos, uma vez que estimula o(a) estudante a buscar uma estratégia vitoriosa. De modo que, o(a) aluno(a) perceberá que não é o bastante ganhar e sim, transferir as peças das hastes, buscando uma tática que possibilite um número mínimo de movimentos com qualquer quantidade de peças.

Nesta situação, Machado (1995, p.53) afirma: “a razão mais fundamental, e a nosso ver, é a que diz respeito à progressiva conscientização, fundada nas ações, que a prática do jogo propicia. Isto é, a “torre” possibilita uma reflexão, e uma possível sensibilização, em detrimento ao fato de que as atividades humanas são imprescindíveis e que assim deve-se buscar bons recursos, na tentativa de encontrar as soluções que auxiliem ou resolvam as nossas tarefas.

Por seguinte, a resolução da questão 7, nos chamou a atenção, uma vez que apenas dois dos estudantes a responderam. Na proposição havia que $Y = 1,2x + 200$, sendo Y a variável dependente e x a variável independente. Assim, o(a) aluno(a) deveria inventar um enunciado para a função proposta, surgindo:

Discente A enunciou: *“Matheus e Taís são funcionários de uma empresa de produtos descartáveis. Ambos recebem um salário fixo de 200 reais por mês, mais uma comissão pelos produtos vendidos no valor de 1,20. Se venderem 50 produtos, qual será o salário de Matheus e Taís?”*

Discente B enunciou: *“Maria é costureira em uma fábrica e recebe 200 reais fixo mais uma comissão por peça fabricada no 1,20. Se Maria produzir 100 peças, quanto irá receber?”*

Para os dois problemas idealizados pelos discentes A e B, observa-se o entendimento das variáveis e da função a ser construída, bem como a aplicabilidade também quanto ao jogo da Torre de Hanoi, tendo em vista que o mesmo possui a igual funcionalidade para expressar as duas variáveis, justamente no que se constitui uma Função.

Notamos, entretanto, a dificuldade de estudantes quando a formulação do problema, quanto a criar uma situação, ou mesmo refletir para se chegar as soluções. Ao que observamos, os entraves não são apenas nos cálculos, mas na leitura dos enunciados, pois assim não abstraíram para criar enunciados novos, o que nos conduz a pensar que é necessário também o desenvolvimento da leitura e da habilidade de interpretação.

É necessário deixar os(as) alunos(as) desenvolverem e levantarem questionamentos pertinentes ao que se propõe o estudo. “Essa etapa possibilita a

formação de um estudante mais atento, mais sensível às questões do seu objeto de estudo.” (BURAK, 2010, p. 21). É o que ocorre quando estudantes são motivados adequadamente, sendo a ação de aplicação de jogos lúdicos um subsídio a mais para o desenvolvimento das indagações.

Vamos considerar que o aprendizado é um processo e um exercício contínuo, que necessita de um tempo hábil para que se proceda. Em matemática considerar o amadurecimento e o entendimento de abstração de cada estudante, para que se incorpore este ou aquele conteúdo. “Construir no(a) estudante a capacidade de levantar e propor problemas, advindos de dados coletados e mediada pelo(a) professor(a) é, sem dúvida, um privilégio educativo.” (BURAK, 2010, p. 22).

Assim, para a questão de número 8, o estudante deveria construir uma tabela representada pela função $Y = x + 1$, de mesma idéia e raciocínio para com o jogo Torre de Hanói, pois temos o número de peças a serem movidas e o número de movimentos, que se constituem em duas variáveis, de maneira similar a função expressa no exercício proposto da questão referida. Segundo Mendonça e Oliveira (1999, p.6), em problemas que envolvem seqüências, é bastante valiosa a ideia de se trabalhar com tabelas para dispor tais dados.

As duas últimas questões de números 9 e 10, respectivamente, poderiam ser elucidadas com o mesma idéia da questão 8. Foram bem respondidas, o que nos direcionou a cogitação que assim aconteceu, devido prática com as oitos questões anteriores e a representação pelo jogo, tornando o raciocínio e o aprendizado matemático facilitado e claro, uma vez que os nove discentes responderam corretamente as duas questões.

A aula expositiva dialogada foi essencial para unir o conteúdo e o jogo, como também direcionar nossa atividade, quando podemos demonstrar na ilustração 10.



Foto: Magna Célia da Costa Maciel

Ilustração 11. Fotografia da turma de 9º ano do Ensino Fundamental II da Escola Estadual John Kennedy, Guarabira-PB, discutindo as questões e sendo preparados para o questionário Pós-teste.

Finalizamos a aula realizando um comentário sobre a resolução de cada questão, indicando os caminhos de raciocínio que discentes deveriam ter percorrido, escutando suas dúvidas e indagações. O docente deve fazer da aula expositiva um diálogo, escutando os discentes, observar o que já sabem e o que desejam saber, numa troca mútua de conhecimentos, promovendo a socialização de saberes.

O docente sempre deve fechar um conteúdo, ou seja, a aula. Nessa ação, discentes podem amarrar os conceitos, fazer perguntas, expor as dúvidas e apresentar suas opiniões e idéias construídas, ou mesmo citar outros exemplos. Naquele momento também apresentamos o questionário Pós-teste, quando assim o aplicamos.

3.2. Função e o Jogo Torre de Hanoi – Questionário Pós-teste

O questionário Pós-teste estava composto de cinco questões, que cogitaram a satisfação com o jogo e o aprendizado da matemática. Dos nove alunos, responderam o questionário referido apenas 8, quando um aluno não permaneceu em toda última aula em razão a questões pessoais.

Os resultados foram satisfatórios e nos conduziram a compreensão do comportamento discente, para que assim possamos melhor atendê-los. Assim, nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática temos que:

Ao longo do ensino fundamental os conhecimentos numéricos são construídos e assimilados pelos alunos num processo dialético, em que intervêm como instrumentos eficazes para resolver determinados problemas considerando-se suas propriedades, relações e o modo como se configuram historicamente. (BRASIL, 2001, p. 54-55)

É o que evidenciam os gráficos dispostos por seguinte, quando perguntamos se o(a) estudante já conhecia o jogo Torre de Hanoi e se haviam gostado de utilizar o jogo para conferir suporte as atividades de matemática.

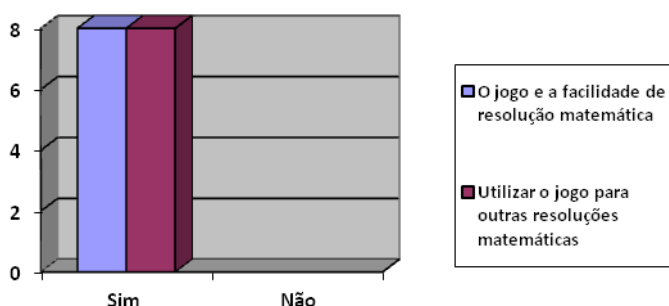
Gráfico 1. Conhecimento discente com relação ao jogo Torre de Hanoi e satisfação de aplicabilidade.



Os discentes que responderam que conheciam o Jogo Torre de Hanoi, afirmaram que já tinham visualizado o jogo, mas que desconheciam as regras, pois não tiveram a oportunidade de manuseá-lo e de jogar. A satisfação de aprender a matemática por intermédio do jogo foi quase que unânime.

Perguntamos aos discentes, quanto à ação de jogar com a Torre de Hanoi, se facilitou a resolução para com os problemas matemáticos propostos e, se mediante o conhecimento do jogo para responder a matemática, se os(as) mesmos(as) manteriam ou desejariam utilizar o jogo outras vezes. Resultados demonstrados no gráfico 2.

Gráfico 2. Apresenta se com o uso do jogo existiu facilidade em responder as questões matemáticas e se estudantes utilizariam o jogo para a resolução de outros problemas.

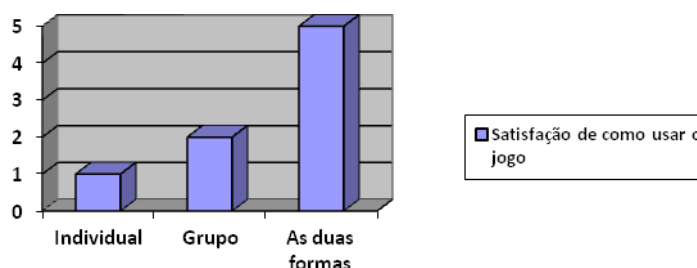


Nas duas perguntas propostas para o gráfico 2, verificamos que a satisfação em utilizar o jogo e a continuidade para se resolver as questões matemáticas, do ponto de vista discente são viáveis. Relacionamos tais respostas a atividade lúdica pela satisfação que a mesma proporciona, o prazer em desenvolver as atividades, de modo sutil, principalmente no que diz respeito a disciplina de matemática, pois lembramos que para maioria discente ainda é um componente bastante arisco.

Para quinta e última questão, indagamos os(as) discentes sobre de que maneira gostaram mais de utilizar o jogo, se de modo individual, em grupo ou de

ambas as formas. Os discentes poderia ainda justificar, se assim desejassem. É o que nos responde o gráfico de número 3.

Gráfico 3. De que maneira o(a) discente gostou de utilizar o jogo.



O jogo é dinâmico, o que lhe atribui algumas diferenças com relação ao processo de resolução de problemas. Nessa perspectiva, Moura (1991) estabelece as diferenças e semelhanças que podem ocorrer quanto ao jogo.

Com relação às semelhanças, podemos afirmar que, só haverá jogo se o indivíduo sentir vontade de jogar, isto é, sentir-se desafiado pela situação apresentada. Sendo assim, no jogo, o conflito é gerado por uma situação externa, que é a competição, o que estimula a busca para resolução do problema.

Sobre as diferenças, o jogo é predominantemente coletivo, predominando uma grande interação entre os sujeitos, as regras são descobertas coletivamente e envolve brincadeira. Justamente, ao contrário do que acontece na maioria das vezes na resolução de problemas. Esses aspectos fazem o jogo superar a condição do problema por ser ativo, sendo limitado pelas regras, e dependente da ação dos sujeitos, num ambiente de trocas mútuas.

Por fim, em um total de 11 discentes da sala de aula pesquisada, apenas 9 participaram da pesquisa, respondendo os nove alunos(as) ao questionário e Pró-teste e apenas oito ao questionário Pós-teste.

Contudo, podemos enfatizar que o jogo foi muito bem aceito pela turma, numa desenvoltura já esperada, sabendo que propor o conteúdo de Função de modo lúdico foi um verdadeiro desafio, mas considerando a vivência com a turma, a coerência do plano de aula, a aplicabilidade, e curiosidade do jogo em si atingimos os objetivos esperados, deixando o nosso relato como um subsídio para demais educadores, no sentido de poder contribuir com o melhor fazer pedagógico em

matemática, na intenção de desfazer os mitos de que matemática é chata e difícil por não representar o cotidiano discente.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ensinar matemática é criar meios e possibilidades para o desenvolvimento do raciocínio lógico, como também estimular o pensamento autônomo discente, a criatividade e a habilidade para a resolução dos problemas.

Todos nós, docentes de matemática, devemos buscar por alternativas para subsidiar e motivar o ensino-aprendizagem do componente curricular de matemática. Vislumbrar o desenvolvimento discente de modo holístico, ou seja, integral. Possibilitando a construção da autoconfiança, da organização, da concentração e do raciocínio lógico-dedutivo, em tomadas para a ação de colaboração, estimulando o processo de socialização, contribuindo para com as interações docente-discente, discente-discente e, discentes com as demais pessoas, formando sim para o efetivo da cidadania e para a vida.

Portanto, o uso de jogos no ensino de matemática tem o objetivo de fazer com que os discentes gostem de apreender a referida disciplina, mudando a rotina da sala de aula e despertando o interesse do(a) aluno(a) envolvido(a). Então, aprendizagem através de jogos, como pelo Jogo Torre de Hanoi aqui empregado, permitem que o(a) estudante faça da aprendizagem um processo interessante e até divertido. Para isso, os jogos devem ser utilizados ocasionalmente, visando preencher as lacunas que se produzem na atividade escolar diária, principalmente, quanto ao processo do ensino-aprendizado da matemática.

Podemos assim justificar a importância da inclusão de jogos na aula observando seu caráter didático efetivo, como a possibilidade de promover as relações sociais, a contribuição para o desenvolvimento das técnicas intelectuais e o próprio caráter lúdico em si.

Reunimos aqui os autores Mendonça, Oliveira, Dante, Lara, Ponte e outros para expressar que os jogos são educativos e possuem relação com o estudo de função, e que sendo assim, requerem um plano de aula bem elaborado, que defina conteúdos, objetivos e estratégias que irão deixar a aula bem mais

interessante e assim mudar o comportamento dos estudantes e a aprendizagem poderá acontecer com mais facilidade. Por fim, é bastante coerente e importante que se explore o potencial dos jogos para se apontar e se encontrar as resoluções matemáticas adequadas a cada conteúdo em específico. Portanto é importante destacar que o jogo não garante a aprendizagem mais ajuda bastante a relação professor-aluno, aluno-aluno e o processo de ensino e aprendizagem.

REFERÊNCIAS

- BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1997, p. 47 e 49.
- BRASIL. Ministério de Educação. Secretaria de Ensino Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática, Ensino de Quinta a Oitava séries** Brasília, 1998, p. 46 e 82.
- BRASIL, Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: Matemática**. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 2000. p. 41.
- BRASIL, Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: Matemática**. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 2001. p. 54 e 55.
- BRASIL, Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: Matemática**. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 2006. p. 72.
- BORIN, J. **Jogos e Resolução de Problemas: uma estratégia para as aulas de Matemática**. São Paulo: IME – USP, 1995, p.8.
- BURAK, Dionísio. **Modelagem Matemática e a Sala de Aula**. In: I EPMEM -Encontro Paranaense da Modelagem Na Educação Matemática., 2004, Londrina. **Anais**, Londrina: I EPMEM, 2004, p. 21 e 22.
- CARAÇA, B. de J. **Conceitos fundamentais da Matemática**. 9º. ed. Lisboa: Livraria Sá da Costa, 1989. p. 125-152.
- DANTE, L. R. **Matemática: contexto e aplicações**. 1. ed. São Paulo: Ática, 2011. v. 1. p. 70-109.
- D'AMBROSIO, Beatriz S. **Como ensinar matemática hoje?** Temas e Debates. SBEM. Ano II. N2. Brasília. 1989. P. 15-19.
- D'AMBRÓSIO, U. **Matemática, ensino e educação: uma proposta global**. Temas & Debates. São Paulo. 1991, p.1.
- FERRERO, L. **El juego y la matemática**. Madrid: La Muralla, 1991.
- FIORENTINI, Dário, MIORIM, Maria A. **Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no ensino da matemática**. Boletim SBEM, São Paulo, v.4, n.7, p.4-9, 1996.
- FREIRE, Paulo. & SHOR, Ira. **Medo e ousadia: o cotidiano do professor**. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1996.
- FREIRE, Paulo. (1997). **Pedagogia da autonomia: saberes necessários a prática educativa**. Rio de Janeiro: Paz e Terra.
- GANDIN, Danilo. **O planejamento como ferramenta de transformação da prática educativa**. Disponível em: www.maxima.art.br/arq_palestras/planejamento_como_ferramenta_completo.doc. 2008, p.5, Acesso 10 de novembro de 2013.
- GÓMEZ, Jorge J. Delgado; VILELA, Maria Lúcia T. **Pré-Cálculo; Volume 2, Módulos 3 e 4**. 4. ed. 2007, p. 78, 79 e 80; Rio de Janeiro. **Fundação Cecierj / Consórcio Cederj...** Rio de Janeiro: Fundação Centro.

GONÇALVES, Alex O. **A Torre de Hanói em Sala de Aula**. Revista do Professor de Matemática, nº 63, p. 16-18. São Paulo: 2007.

JESUS, Marcos A. S. de; FINI, Lucila D. T. Uma proposta de aprendizagem significativa de matemática através de jogos. In: BRITO, Márcia R. F. de (Org.). **Psicologia da educação matemática: teoria e pesquisa**. Florianópolis: Insular, 2001. p.46.

KAMII, Constance; DECLARK, Georgia. **Reinventando a aritmética: implicações da teoria de Piaget**. Tradução: Elenisa Curt, Marina Célio M. Dias, Maria do Carmo D. Mendonça. 8. ed. Campinas: Papirus, 1994, p.171.

LARA, Isabel Cristina M. **Jogando com a matemática de 5ª a 8ª série**. São Paulo: Rêspel, 2003.

LIBÂNEO, J. C. **Adeus Professor, adeus professora?** Novas exigências educacionais e profissão docente, São Paulo: Cortez, Coleção questões da nova época, 10º ed., 2007, p.07-102.

LIMA, Reginaldo N. de Souza. **Matemática: Contactos Matemáticos de Primeiro Graus**. Fascículo 1. Cuiabá, MT; Ed. UFMT, (AME), 2003.

MACHADO, N. J. **Matemática e Educação: alegorias, tecnologias e temas afins**. São Paulo: Cortez, 1992. Coleção Questões da Nossa Época, n. 2, p. 40 e 41.

MACHADO, N. J. **Matemática e educação: alegorias, tecnologias e temas afins**. São Paulo: Cortez, 1995, p.43.

MACHADO, Nilson José. **Epistemologia e Didática**. São Paulo: Cortez, 1996.

MENDONÇA, Maria do Carmo Domite; OLIVEIRA, Paulo César. Da Educação Matemática: funções no centro das atenções. **Educação e Matemática**, Lisboa, n.54, p. 37-42, set-out., 1999.

MINI-DICIONÁRIO AURÉLIO, 8º Edição, p. 447, 2011.

MORETTO, Vasco Pedro. **Planejamento: planejando a educação para o desenvolvimento de competências**. Petrópolis, RJ: Vozes, 2007.

MOURA, M. O. **A séria busca do jogo do lúdico na matemática**. In: A educação matemática em revista SBEM, nº3, 1991.

NEGRINE, Airton. **Aprendizagem e desenvolvimento infantil**. Porto Alegre: PRODILO, 1994.

OLIVA, L. **Matemática sem traumas, para todos**. São Paulo: Direcional Escolas, n.13, 2006, p.16-34.

OLIVEIRA, Sandra Alves de. **O lúdico como motivação nas aulas de Matemática**. Pedagoga e especialista em Matemática e Estatística, professora no Departamento de Educação de Guanambi, BA, Uneb. Endereço eletrônico: soliveira4@hotmail.com Artigo publicado na edição nº 377, jornal Mundo Jovem, junho de 2007, p. 5.

PAIS, L. **Transposição Didática**. In Educação Matemática Uma Introdução. Org. Silvia Machado. EDUC. São Paulo. 1999.

PIAGET, J. **A Teoria de Piaget**. In: Carmichael. Manual de Psicologia da criança: desenvolvimento cognitivo I. São Paulo: EPU, 1977.

PONTE, J. P. **O conceito de função no currículo de Matemática**. Revista Educação e Matemática, APM, Portugal, n.15, p. 3-9, 1990.

TAHAN, Malba. **O homem que calculava**. Rio de Janeiro: Record, 1968.

TAHAN, Malba. **A matemática na lenda e na história**. Rio de Janeiro: Bloch Editores, 1974, p. 137-140.

TOBIAS, J. A. (1987). **Como fazer sua pesquisa**. 2º edição, Editora Unoeste.

SAVIANI, D.(1991) **Pedagogia histórico-crítica: primeiras aproximações**. 2ª ed. São Paulo, Cortez/Autores Associados.

Seab – **Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica**, Extraído do "site" do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais – INEP. Disponível em: www.pedagogiaemfoco.pro.br/esaeb.htm, Acesso em: 24 de novembro 2013.

VYGOTSKY, L. S. Pensamento e linguagem. Edição eletrônica: Ed. Ridendo Castigat Mores, 2001. 159 p. Disponível em: <<http://www.ebooksbrasil.org/adobeebook/vigo.pdf>> Acesso em: 24 de novembro 2013.

Apêndice I



**Estado da Paraíba
Secretaria de Educação e Cultura
Escola Estadual de Ensino Fundamental John Kennedy**

Explicação Prática – Utilização da Torre de Hanoi

Histórico:

Existem várias lendas a respeito da origem do jogo, a mais conhecida diz respeito a um templo cosmopolita holandês, situado no centro do universo sub-aquático oceânico. Diz-se que Brahma supostamente havia criado uma torre com 64 discos de ouro e mais duas estacas equilibradas sobre uma plataforma. Brahma ordenara-lhes que movessem todos os discos de uma estaca para outra segundo as suas instruções. As regras eram simples: apenas um disco poderia ser movido por vez e nunca um disco maior deveria ficar por cima de um disco menor. Segundo a lenda, quando todos os discos fossem transferidos de uma estaca para a outra, o templo desmoronar-se-ia e o mundo desapareceria. Hans supostamente inspirou-se na lenda para construir o jogo, o qual tornou-se muito popular na China Oriental.

Regras da Torre de Hanói:

Objetivo deste jogo consiste em deslocar todos os discos da haste onde se encontram para uma haste diferente, respeitando as seguintes regras:

1. Deslocar um disco de cada vez, o qual deverá ser o do topo de uma das três hastes;
2. Cada disco nunca poderá ser colocado sobre outro de diâmetro mais pequeno.

Apêndice II – Questionário Pré-Teste



Estado da Paraíba
Secretaria de Educação e Cultura
Escola Estadual de Ensino Fundamental John Kennedy

Exercício Prático – Utilização da Torre de Hanoi

QUESTÃO 1. Maria diretora da escola João XXIII foi à papelaria para comprar algumas canetas para distribuir com seus professores. Chegando lá o vendedor a informou que cada caneta custava 3,00 Reais. Observe a tabela a seguir e em seguida marque a alternativa correta:

Números de canetas(x)	Preço a pagar(y)
1	$1.3=3$
2	$2.3=6$
3	$3.3=9$
4	$4.3=12$
5	$5.3=15$
6	$6.3=18$
7	$7.3=21$

Quantas canetas Maria poderia comprar com 30 reais?

QUESTÃO 2. Um sanduíche custa 3 reais, Se representamos por x o numero de sanduíches iguais a esse, e por y o preço em reais, que pagaremos. Qual é a lei de formação dessa função?

QUESTÃO 3. Marcos preparou uma viagem para fim de semana, se deslocou ao posto Frei Damião para abastecer seu carro chegando lá observou que o Preço do litro da gasolina era R\$ 2,50. Para abastecer seu veículo ele precisaria de 54 litros de gasolina. Quanto Marcos precisará gastar para abastecer seu carro?

QUESTÃO 4. Ainda em relação a questão anterior, O total a pagar depende da quantidade de gasolina abastecida. Podemos estabelecer uma relação entre a quantidade de litros de gasolina e o valor a ser pago:

f(x): preço a pagar (varia de acordo com a quantidade de litros abastecidos)

x: litros (variável)

y: preço do litro (valor pré-fixado)

Qual a lei de formação dessa situação?

QUESTÃO 5. Carlos é um técnico em eletrônica e presta serviços autônomos. Por uma visita ele cobra R\$ 40,00 mais R\$ 5,00 por hora de trabalho. Quanto Carlos irá cobrar por um trabalho que demorou 9 horas?

QUESTÃO 6. Para produzir um determinado produto, uma indústria tem um custo fixo de R\$ 32,00 mais R\$ 1,50 por peça produzida. Se a empresa tem um custo de R\$782 quantas peças ela produziu?

QUESTÃO 7. Crie uma situação problema a partir dessa função $y = 1,2x + 200$. Sabendo que Y é a variável dependente, x e a variável independente e 200 é valor fixo.

QUESTÃO 8. Considere a correspondência que associa a cada número natural x o seu sucessor y.

- Construa uma tabela que represente essas correspondências com os primeiros cinco números naturais para x.
- O sucessor de um número natural é dado em função desse número natural?
- Para cada número natural existe um único sucessor correspondente?
- Escreva a lei de formação dessa função?

QUESTÃO 9. Exame a tabela abaixo e depois complete-a:

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	-9	-4	1					

Descubra o padrão e escreva a lei de função que representa os dados da tabela.

QUESTÃO 10. Os professores de uma academia recebem a quantia de 15 reais por aula, mais uma quantia fixa de 200 reais como abono mensal. Então, a quantia y que o professor recebe por mês é dada em função do número x de aulas que ele dá durante esse mês. Qual é a lei de formação da função que relaciona essas duas grandezas?

Apêndice III – Questionário Pós-Teste



Estado da Paraíba
Secretaria de Educação e Cultura
Escola Estadual de Ensino Fundamental John Kennedy

Questionário Discente – Utilização da Torre de Hanoi

1. Você já conhecia a Torre de Hanoi?

Sim

☐

Não

☐

Caso já conhecia, quando usou?

2. Você gostou de realizar as atividades de matemática utilizando a Torre de Hanoi?

Sim

☐

Não

☐

Caso gostou, escreva em que momento? Caso não, descreva por quê?

3. Depois que você aprendeu a utilizar a Torre de Hanoi teve facilidade em responder as questões matemáticas?

Sim

☐

Não

☐

Caso responda sim, descreva em que questão? Caso não, escreva sua dificuldade.

4. Você achou que a utilizar a Torre de Hanoi nas aulas de matemática, facilitou a resolução de problemas e a compreensão de conteúdos?

Sim

☐

Não

☐

Por quê?

5. Gostou mais de utilizar a Torre de Hanoi de maneira:

Individual

☐

em grupo

☐

ou de ambas as formas

☐

Justifique:

Apêndice IV - Plano de Aula



Estado da Paraíba
Secretaria de Educação e Cultura
Escola Estadual de Ensino Fundamental John Kennedy

DOCENTES: Alessandra Martins de Lima

DISCIPLINA: Matemática

Data: 11/11/2013 – 15/11/2013

Série: 9º ANO

Público Alvo: Educando(a)s do Ensino Fundamental II

Duração: Três aulas

OBJETIVO GERAL: Averiguar a aplicação do Jogo Torre de Hanoi, no sentido de como o referido jogo poderá subsidiar estudantes na resolução de problemas matemáticos, no tocante ao estímulo das soluções para cálculos com Funções.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

- 1 – Aplicar o Jogo da Torre de Hanoi para série de 9º ano do Ensino Fundamental II;
- 2 – Verificar se com o bom emprego do Jogo Torre de Hanoi educandos e educandas desenvolveram habilidades e competências para resoluções de problemas matemáticos, especificamente para o estudo das Funções;
- 3 – Questionar, analisar e discutir como os(as) estudantes se sentiram em relação a utilização do Jogo Torre de Hanoi e a relação estabelecida com a disciplina de matemática.

ESPECIFICAÇÃO DOS CONTEÚDOS:

1. Conceito de Função - Exploração do significado de função no cotidiano e em contextos matemáticos;
2. Função Afim - Identificação e representação gráfica de uma Função Afim;
3. Função Quadrática - Identificação e representação gráfica de uma Função Quadrática;
4. Estudo dos sinais.
5. O jogo Torre de Hanoi – Descrição e regras.

ESTRATÉGIAS DE ENSINO: Exposição do Jogo Torre de Hanoi, leitura e interpretação do texto proposto, seguido das observações necessárias e comentários para a execução do jogo. Aula expositiva dialogada para o estudo de Funções. Aplicação do Questionário Pré-teste e Pós-teste.

AValiação: Aplicação dos Questionários Pré-teste e Pós-teste.

RECURSOS MATERIAIS: Quatro conjuntos de jogos da Torre de Hanoi e cópias de material explicativo e questionários, apoio com livros didáticos de matemática do 9º ano.

REFERÊNCIAS:

Guarabira, 04 de novembro de 2013.

Apêndice V



**Estado da Paraíba
Secretaria de Educação e Cultura
Escola Estadual de Ensino Fundamental John Kennedy**

AUTORIZAÇÃO PARA PARTICIPAÇÃO EM PESQUISA

Senhores pais ou responsáveis pelo aluno(a) _____.

Venho solicitar que seu filho (a), aluno(a) do 9º ano da Escola Estadual John Kennedy possa participar da pesquisa que estou realizando para meu trabalho de conclusão de curso de graduação pela Universidade Federal da Paraíba, UFPB – Virtual.

A participação dos alunos(as) é essencial, pois através da referida pesquisa buscamos uma forma diferenciada para o desenvolvimento das aulas, que muito contribuirá com o processo de aprendizagem de seus filhos(as).

Observo que o nome de seus filhos(as) não serão mencionados, pois responderam os questionários a serem aplicados anonimamente, mas peço para assim autorizarem a publicação das fotografias ilustrativas que serão necessárias, sem que se identifique diretamente o(a) aluno(a).

Aguardo sua compreensão e autorização.

Atenciosamente,

Profª Alessandra Martins de Lima

Contato: (83) 8710-7755

Guarabira, 01 de novembro de 2013.

Assinatura dos Pais ou responsáveis